संख्या पद्धति

इस अध्याय के सभी महत्वपूर्ण प्रश्न – उत्तर सहित। पहले खुद हल करने की कोशिश करो, फिर उत्तर मिलाओ।

अभ्यास प्रश्न-उत्तर (हर टॉपिक से)

» संख्या रेखा की यात्रा - प्राकृत, पूर्ण और पूर्णांक

» परिमेय संख्याएँ और संग्रह Q

» तुल्य परिमेय संख्याएँ और अद्वितीय निरूपण

» दो परिमेय संख्याओं के बीच परिमेय संख्याएँ

» अपरिमेय संख्याएँ

» वास्तविक संख्याएँ और वास्तविक संख्या रेखा

» संख्या रेखा पर 2 और 3 का निरूपण

» वर्गमूल सर्पिल और दशमलव प्रसार की शुरुआत

हल किए हुए उदाहरण (step-by-step)

उदाहरण 1. नीचे दिए कथन सत्य हैं या असत्य? कारण सहित लिखो: (i) प्रत्येक पूर्ण संख्या एक प्राकृत संख्या होती है।

› पूर्ण संख्याओं का संग्रह W = {0, 1, 2, 3, ...} याद करो

› प्राकृत संख्याओं में सामान्यतः 0 शामिल नहीं होता: N = {1, 2, 3, ...}

› शून्य पूर्ण संख्या है पर प्राकृत नहीं – अतः कथन असत्य है

उत्तर – असत्य – क्योंकि शून्य एक पूर्ण संख्या है परन्तु प्राकृत संख्या नहीं है।

उदाहरण 2. क्या शून्य एक परिमेय संख्या है? क्या इसे p/q रूप में लिख सकते हैं जहाँ p, q पूर्णांक और q 0?

› परिभाषा लागू करो: क्या 0 = p/q लिखा जा सकता है?

› हाँ – 0 = 0/1 (या 0/2, 0/5, ...) जहाँ q 0

› निष्कर्ष: शून्य परिमेय संख्या है

उत्तर – हाँ, शून्य परिमेय है क्योंकि 0 = 0/1, जहाँ p = 0, q = 1 0।

उदाहरण 3. भिन्न 18/24 को असहभाज्य रूप में लिखो और बताओ संख्या रेखा पर कौन-सा रूप निरूपित करेंगे।

› HCF(18, 24) ज्ञात करो = 6

› 18 ÷ 6 = 3, 24 ÷ 6 = 4 3/4

› HCF(3, 4) = 1, अतः संख्या रेखा पर 3/4 निरूपित होगा

उत्तर – 18/24 = 3/4 (असहभाज्य रूप); संख्या रेखा पर 3/4।

उदाहरण 4. 3 और 4 के बीच छः परिमेय संख्याएँ ज्ञात कीजिए (एक चरण विधि)।

› छह संख्याएँ चाहिए हर = 6+1 = 7

› 3 = 21/7, 4 = 28/7 लिखो

› बीच की संख्याएँ: 22/7, 23/7, 24/7, 25/7, 26/7, 27/7

उत्तर – 22/7, 23/7, 24/7, 25/7, 26/7, 27/7 (अन्य सही समुच्चय भी मान्य)

उदाहरण 5. क्या सभी धनात्मक पूर्णांकों के वर्गमूल अपरिमेय होते हैं? यदि नहीं, तो एक परिमेय वर्गमूल का उदाहरण दो।

› परिभाषा याद करो: अपरिमेय = p/q रूप में नहीं

› 4 = 2 = 2/1, जो परिमेय है

› अतः सभी धनात्मक पूर्णांकों के वर्गमूल अपरिमेय नहीं होते

उत्तर – नहीं; उदाहरण: 4 = 2 (परिमेय)। (9 = 3 भी मान्य)

उदाहरण 6. कथन सत्य/असत्य (कारण सहित): (i) प्रत्येक अपरिमेय संख्या एक वास्तविक संख्या होती है। (iii) प्रत्येक वास्तविक संख्या एक अपरिमेय संख्या होती है।

› (i) R = Q irrationals, अतः हर अपरमिेय R सत्य

› (iii) 2 = 2/1 परमिेय है और वास्तवकि भी – पर अपरमिेय नहीं

› अतः (iii) असत्य

उत्तर – (i) सत्य; (iii) असत्य, क्योंकि उदाहरणतः 2 वास्तविक है पर अपरिमेय नहीं।

उदाहरण 7. संख्या रेखा पर 5 निरूपित करने के मुख्य चरण लिखो।

› पहले 4 = 2 को संख्या रेखा पर चिह्नित करो

› लंबाई 2 वाले खंड पर एकक लंबाई का लंब खड़ा करो; कर्ण = (4+1)=5

› केंद्र मूल बिंदु, त्रिज्या = वह कर्ण – चाप से संख्या रेखा पर 5 का बिंदु प्राप्त करो

उत्तर – 4=2 से इकाई लंब कर्ण 5; परकार चाप से संख्या रेखा पर 5।

उदाहरण 8. 7/8 का दशमलव प्रसार भाग देकर ज्ञात कीजिए और बताइए यह किस प्रकार का प्रसार लगता है (समाप्त होने वाला / न समाप्त)।

› 7 ÷ 8 करो: 8×0.8 = 6.4, शेष संबंधी गणना जारी रखो

› 0.875 तक पहुँचो – 875 में अंतिम शेष 0

› 7/8 = 0.875 – समाप्य (terminating) दशमलव प्रसार

उत्तर – 7/8 = 0.875 (समाप्य दशमलव प्रसार)

बोर्ड परीक्षा के लिए ख़ास

- True/False में हमेशा counter-example दो – जैसे हर पूरण संख्या प्राकृत है के लिए counter-example = 0।
- परिभाषा लिखते समय q 0 कभी मत भूलना – examiner अक्सर इसी पर आधा अंक काटता है।
- अद्वितीय निरूपण लिखते समय असहभाज्य / HCF = 1 शब्द ज़रूर लिखो।
- दोनों विधियाँ याद रखो; उत्तर में अपरिमित रूप से अनेक वाली टिप्पणी लिखने पर अक्सर पूर्ण अंक मिलते हैं।
- 4 = 2 वाली टिप्पणी और perfect square मूल परिमेय – Exercise 1.2 Q2 का सीधा जवाब।
- Chain NWZQR याद करो; True/False में counter-example (2 या 2) तैयार रखो।
- रचना प्रश्न में neat diagram + Pythagoras equation + परकार से चाप तीनों अनिवार्य लिखो।
- क्रियाकलाप वर्णन में O से खंड पर लंब स्पष्ट लिखो; दशमलव में शेषफल का चक्र ज़रूर दिखाओ।

एक नज़र में रिवीज़न

› N W Z; zero W लेकनि zero N; Z = Zahlen.

› Rational = p/q with q 0; Q from quotient; Z Q.

› Equivalent rationals share one point; represent in coprime form HCF(p,q)=1.

› Between any two rationals there are infinitely many rationals; use midpoint or (n+1) denominator method.

› Irrational ratio of integers; (perfect square) can be rational; symbol means positive root.

› R = Q irrationals; bijection between reals and points on the number line (Weierstrass-Dedekind).

› Construct 2 via unit square diagonal; 3 via unit perp on 2; generalize n from (n−1).

› Square-root spiral via successive unit perpendiculars; decimal expansions of rationals show terminating/repeating remainder patterns.